

Fejér の定理

Theorem. $[-\pi, \pi]$ で定義された関数 f の n 次 Fourier 複素級数の第 n 部分 $S_n f(x)$ を

$$S_n f(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}, c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \quad (k \in \mathbb{Z})$$

とする.

また, $\sigma_n f(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(x)$ とする. もし $p \geq 1$ なる p に対して $f \in L^p([-\pi, \pi])$ ($p = \infty$ のときは連続性も仮定) であれば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\sigma_n f - f\|_p = 0$$

となる.

Proof. まずは $\sigma_n f$ を積分表示する. c_k の定義に従うと

$$\begin{aligned} \sigma_n f(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{j=-k}^k c_j e^{ijx} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{j=-k}^k \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-ijy} dy \right) e^{ijx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{j=-k}^k e^{ij(x-y)} \right) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) F_n(x-y) dy \end{aligned}$$

と式変形を行うことができる. ただし, $F_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{j=-k}^k e^{ijt}$ と置いた. F_n は n 次の Fejér 核と呼ばれている.

ここで, F_n を総和記号を用いずに閉じた形で表示をする. 等比数列の和の公式および Euler の公式を

用いると

$$\begin{aligned}
F_n(t) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{e^{-ikt}(e^{i(2k+1)t} - 1)}{e^{it} - 1} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{e^{i(k+\frac{1}{2})t} - e^{-i(k+\frac{1}{2})t}}{e^{i\frac{1}{2}t} - e^{-i\frac{1}{2}t}} \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2i \sin \frac{1}{2}t} \sum_{k=0}^n \left(e^{i(k+\frac{1}{2})t} - e^{-i(k+\frac{1}{2})t} \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2i \sin \frac{1}{2}t} \left(\frac{e^{i\frac{1}{2}t}(e^{i(n+1)t} - 1)}{e^{it} - 1} - \frac{e^{-i\frac{1}{2}t}(1 - e^{-i(n+1)t})}{1 - e^{-it}} \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2i \sin \frac{1}{2}t} \left(\frac{e^{i(n+1)t} - 1}{e^{i\frac{1}{2}t} - e^{i\frac{3}{2}t}} - \frac{1 - e^{-i(n+1)t}}{e^{i\frac{1}{2}t} - e^{-i\frac{3}{2}t}} \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2i \sin \frac{1}{2}t} \frac{e^{i(n+1)t} - 2 - e^{-i(n+1)t}}{e^{i\frac{1}{2}t} - e^{i\frac{3}{2}t}} \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2i}{(2i)^2 \sin \frac{1}{2}t} \frac{(e^{i\frac{n+1}{2}t} - e^{-i\frac{n+1}{2}t})^2}{e^{i\frac{1}{2}t} - e^{-i\frac{1}{2}t}} \\
&= \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t} \right)^2
\end{aligned}$$

と変形される。このことから、次の3つの性質をみたすことがわかる。

- (i) $F_n(t) \geq 0$ ($t \in \mathbb{R}$)
- (ii) $\|F_n\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = 2\pi$
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta < |t| < \pi} F_n(t) dt = 0$ ($\forall \delta > 0$)

実際, (i) は, $F_n(t) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t} \right)^2 \geq 0$ より明らか. (ii) は, $k \in \mathbb{Z}$ が $k \neq 0$ のとき $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} dt = 0$ であり, $F_n(t) = \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1} \right) e^{ikt}$ であることよりわかる. (iii) は, F_n は偶関数であり $\delta < t < \pi$ のとき $\frac{\delta}{2} < \frac{1}{2}t < \frac{\pi}{2}$ から Jordan の不等式から $\sin \frac{1}{2}t \geq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2}t > \frac{\delta}{\pi}$ となり

$$\int_{\delta < |t| < \pi} F_n(t) dt = 2 \int_{\delta < t < \pi} F_n(t) dt \leq \frac{2}{n+1} \cdot \frac{\pi^2}{\delta^2} \int_{\delta < t < \pi} \sin^2 \frac{n+1}{2}t dt = \frac{2}{n+1} \cdot \frac{\pi^2}{\delta^2} (\pi - \delta) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

よりわかる.

$\sigma_n f - f$ を積分表示して評価していく. また, $1 < p < \infty$ のとき L^p 連続性より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $|y| \leq \delta$ のとき $\|f(\cdot - y) - f\|_p < \varepsilon$ をみたすような $\delta > 0$ が存在する. よって

$$\begin{aligned}
\sigma_n f(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) F_n(x-y) dy - f(x) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) F_n(y) dy - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) F_n(y) dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-y) - f(x)) F_n(y) dy \\
\|\sigma_n f - f\|_p &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f(\cdot - y) - f\|_p F_n(y) dy \quad (\because \text{積分型の Minkowski の不等式}) \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|y| \leq \delta} \|f(\cdot - y) - f\|_p F_n(y) dy + 2 \|f\|_p \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |y| < \pi} F_n(y) dy \\
&< \varepsilon \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{|y| \leq \delta} F_n(y) dy + 2 \|f\|_p \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |y| < \pi} F_n(y) dy \\
&< \varepsilon + 2 \|f\|_p \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |y| < \pi} F_n(y) dy
\end{aligned}$$

となる. ここで, 性質 (iii) より n を十分大きくすれば $2\|f\|_p \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |y| < \pi} F_n(y) dy < \varepsilon$ となるから, $\|\sigma_n f - f\|_p < 2\varepsilon$ となり, $1 < p < \infty$ のときは示された.

$p = \infty$ のとき f は連続なので, $\|f(\cdot - y) - f\|_\infty$ の値は十分小さくできるから同様に示すことができる.

以上より, 定理が示された. ■